

ZÉRO, UN CHIFFRE ROND, UN CONCEPT POINTU

Jalons pour une histoire de rien

Par Maryvonne SPIESSER¹

*« Plus une chose est petite et moins on la connaît :
comme ce Rien est donc invisible, incompréhensible ! »*
John Donne²

L'histoire de zéro – ou plutôt des zéros – est complexe et foisonnante. C'est un sujet qui, de son champ d'origine, la représentation numérique écrite et le calcul, investit d'autres domaines, de la métaphysique et la philosophie à l'informatique et la physique contemporaine. Pour le commun des mortels, c'est un objet à la fois familier et mystérieux. Il est familier car il fait partie de notre univers : il suffit de penser à toutes les expressions impliquant ce mot. Certaines marquent une origine (partir de zéro, tolérance zéro...), beaucoup ont une connotation négative (zéro de conduite, avoir le moral à zéro...). Ainsi, le titre français du célèbre roman d'Arthur Koestler, *Le zéro et l'infini*, se réfère au fait que l'homme n'est rien, un zéro face à la collectivité (« *L'individu n'était rien, le Parti tout* »). Citons pour finir ce court passage des *Grands chemins* de Jean Giono qui engage zéro et « moins que zéro » : « *Ce pays sans pluie c'est zéro ; avec la pluie c'est encore moins, mais on se débrouille mieux avec des manques qu'avec rien* ».

Zéro est mystérieux, car il est difficile à saisir. Zéro c'est rien, ça nous file entre les doigts. Raymond Devos a joué avec bonheur sur l'ambiguïté du sens commun de « rien » dans son sketch « Parler pour ne rien dire » : « *Rien, ce n'est pas rien. Une fois rien, c'est rien ; deux fois rien, ce n'est pas beaucoup ! Mais trois fois rien !... Pour trois fois rien, on peut déjà acheter quelque chose !* ». Penser l'absence est un défi que l'entendement a du mal à relever, car la représentation même de l'absence lui confère une présence. Toutes les civilisations n'appréhenderont pas cette question de la même manière et cela a sans doute pesé sur l'émergence d'un zéro-nombre, objet mathématique.

Enfin, dans la pratique, zéro ne se comporte pas comme les autres nombres usuels : combien d'erreurs à l'école où il est coupable ! Parce qu'on peut dire n'importe quoi si on utilise zéro mal à propos dans les calculs, si on lui fait suivre les mêmes routes qu'aux autres nombres. Parce que multiplier par zéro donne toujours zéro, zéro n'a pas d'inverse (il n'existe pas de nombre a tel que $0 \times a = 1$), on ne peut donc pas diviser par zéro (diviser c'est multiplier par l'inverse) comme on divise par 3. Pourtant, le fait que zéro, c'est « rien » fait dire à beaucoup d'enfants que $3 : 0 = 3$!

1 Communication présentée à l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse à la séance du 24 novembre 2022.

2 Poète et prédicateur anglais sous le règne de Jacques I^{er}.

Toute une mythologie s'est construite autour de ce petit cercle. Signe de la fascination pour zéro, une question récurrente est : qui a inventé le zéro ? Or, on ne peut pas répondre à cette question : il n'y a pas une invention ni une origine du zéro, parce que zéro a plusieurs visages. D'autre part, de la Haute Antiquité au Moyen Âge, les documents originaux ne nous donnent pas ou peu d'indices sur la nature ontologique des objets manipulés. Et ce que nous en disons aujourd'hui n'est que reconstruction *a posteriori*³.

Nous ne pourrions pas tout dire sur zéro. J'ai choisi d'observer quelques civilisations ou périodes de l'histoire qui permettent de mettre en évidence la pluralité du zéro en mathématiques : principalement la distinction entre le chiffre, ou marquage d'absence d'unités, et le nombre.

Préambule

Avant d'examiner ces questions, il est important de rappeler les deux principaux modes de numération écrite qui ont parcouru l'histoire du calcul. Pour cela, je prendrai les exemples bien connus de la numération romaine et de la numération indo-arabe. Ce sont deux systèmes fondés sur la base dix (décomposition en unités, dizaines, centaines, etc.). Mais leur structure est différente. La numération dite romaine est de type additif : pour les nombres inférieurs à dix mille – ensuite c'est plus compliqué et hors de notre propos – il existe un symbole pour un (I), dix (X), cent (C), mille (M), avec des symboles intermédiaires pour cinq (V), cinquante (L), cinq cents (D) qui permettent de réduire la taille de l'écriture. La valeur d'un nombre est la somme des valeurs des symboles qui le composent. Par exemple, trois mille huit cent soixante-quatorze s'écrit MMMDCCLXXIII soit trois fois mille (MMM) plus huit cents (DCCC) plus soixante-dix (LXX) plus quatre (IIII). On juxtapose les signes dans la décomposition en unités, dizaines, centaines, etc., et on pourrait les écrire dans n'importe quel ordre.

Notre numération, dont l'origine est indo-arabe, ne relève pas d'un principe additif, mais positionnel : la valeur d'un symbole (chiffre) dépend de sa position dans l'écriture du nombre. Le nombre précédent s'écrit 3874 ($3 \times 1000 + 8 \times 100 + 7 \times 10 + 4$) et diffère, par exemple, de 8743. En conséquence, si un multiple de dix vient à manquer, comme c'est le cas dans le nombre deux mille vingt-deux où il n'y a pas de centaine, cela ne pose aucun problème dans le système romain : on écrira MMXXII. En revanche, dans le système indo-arabe, il faut inventer un symbole pour noter cette absence : c'est le symbole 0. Ainsi, 2022 n'est pas 222 ! Le système de numération en usage dans chaque culture va donc peser sur l'invention de zéro en tant que chiffre (*figura* en latin), symbole ou signe qui marque l'absence d'une unité d'ordre donné (pas de centaine dans deux mille vingt-deux).

Zéro en Mésopotamie : un signe pour l'absence

Vers la fin du III^e millénaire avant notre ère (période paléo-babylonienne), apparaît, on ne sait trop par quel cheminement, un système positionnel d'écriture des nombres.

3 Dans son ouvrage sur zéro, Robert Kaplan nous dit : « *Le torrent de conjectures sur la genèse du zéro jaillit en fait de la nature de la pensée historique. Nous cherchons à découvrir ce qui a eu lieu dans un passé lointain et peu documenté. Nous disposons d'indices bien maigres mais notre esprit est aussi vif qu'ingénieux et saisit tout silex qui pourrait faire jaillir une étincelle, afin d'éclairer les ténèbres* » (Kaplan, 50).

Il est fondé sur la base soixante (sexagésimal) comme l'étaient les systèmes précédents et utilisé de façon systématique dans les milieux érudits du sud mésopotamien⁴. On a retrouvé de multiples tablettes scolaires – beaucoup proviennent de Nippur – remontant aux années 2000 - 1600 environ, contenant des calculs mathématiques fondés sur ce système. Pour bien faire, il faudrait disposer de 59 signes comme nous disposons de 9 signes dans notre numération, hors zéro. Ce qui serait très inconfortable et difficile à mémoriser. Dans cette numération, il n'y a que deux signes : l'un désigne l'unité, l'autre dix. Ils sont écrits dans l'argile à l'aide d'un calame et permettent d'écrire les « chiffres » de un à cinquante-neuf.

Le clou : un  L'encoche : dix 

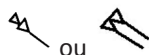
Par exemple, trente-deux est représenté par :  .

On procède de soixantaine en soixantaine en notant, comme dans notre numération, les « chiffres » attachés à chaque ordre.

Par exemple, 661 s'écrit  car 661 est égal à 11 soixantaines et 1 unité⁵.

Cette écriture a des failles. On peut la confondre avec l'écriture de douze (une encoche et deux clous). Et comment écrire 39601, soit $11 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1$, dans notre écriture ? La notation sera la même que ci-dessus, mais pour indiquer l'absence de soixantaine on espacera le 11 du 1.

Pour éviter les confusions et les erreurs de lecture, il faudrait disposer d'un signe qui dise l'absence d'une puissance de soixante. Ce n'est que tardivement, vers -300, à l'époque séleucide (305-64 av. notre ère), que deux encoches inclinées indiquent l'absence d'unité : on a inventé un signe pour signaler une place vide.



Donnons un exemple : 57601, qui se décompose en $16 \times 60^2 + 0 \times 60 + 1$, s'écrit :



À l'époque séleucide se développe l'astronomie mathématique dans le sud mésopotamien, qui manipule de très grands nombres, avec la nécessité de ne pas faire d'erreur sur les ordres de grandeur. Est-ce là ce qui a impulsé l'invention du signe pour l'absence d'unité ?

Excursion dans le continent américain : les zéros des Mayas

Entre 250 et 900 de l'ère chrétienne (période dite classique qui vit le plein épanouissement de la civilisation maya), de grandes cités furent bâties qui nous ont laissé d'impressionnants vestiges et des documents conservés dans la pierre ainsi que des

4 La base soixante est intéressante car 60 est riche en diviseurs (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30). En métrologie et dans les dénombrements pour la vie pratique, le principe est en général additif.

5 Le système est à « virgule flottante ». Autrement dit, l'écriture précédente peut tout aussi bien signifier 661 que 661 soixantaines, et plus généralement 661×60^n (le contexte permettant en général de décider).

manuscrits (*codex* ou *codices* au pluriel) fabriqués à partir d'écorce d'arbre. Le contenu traite principalement de sciences astrales : astronomie, calendriers, divination. Il est donc nécessaire, avant d'évoquer les zéros, de comprendre, au moins dans les grandes lignes, comment on mesurait le temps⁶. Les Mayas s'étaient dotés de deux calendriers, rituel et solaire. C'est l'année solaire ou séculière qui nous intéresse à propos de zéro. Elle compte 18 mois de 20 jours (soit 360 jours) et une période (néfaste) de 5 jours qui complète à 365 le nombre total de jours.

Les savants mayas étaient fascinés par le temps long. Ainsi, le calendrier solaire « traverse le temps » au sens suivant : à partir d'un premier cycle, on définit un cycle 20 fois plus long, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir des durées de plusieurs millions d'années. Ce système de calcul a été baptisé « calendrier du long compte ».

À partir du jour (*kin*), on obtient le mois de 20 jours (*Uinal*) puis l'année de $18 \times 20 = 360$ jours (*tun*), puis la période de 20 *tuns*, nommée *katun*, qui vaut $20 \times 360 = 7200$ jours, puis la période de 20 *katuns* (144 000 jours), etc. On remarquera que 18 fait exception dans ce système qui n'est donc pas strictement de base vingt.

Les numérations écrites utilisent deux styles de représentation des nombres (voir figure 2) : les signes avec points et barres (dominant dans les *codex*) et les glyphes numériques, souvent céphalomorphes (sur la pierre ou dans les *codex*). Les Mayas disposaient de deux zéros différents : un zéro ordinal et un zéro cardinal, dans le contexte de l'indication de dates (ordinal) ou de durées (cardinal).

Le zéro ordinal est utilisé dans le calendrier solaire. Les 20 jours du mois sont numérotés de 0 à 19 et les 5 jours de la période complémentaire de 0 à 4. Le zéro ordinal apparaît donc devant un nom de mois pour en indiquer le premier jour. Pourquoi commencer à zéro ? Ce signe indique que la période qui commence est en train de s'installer. Dans la pensée mystique maya, la divinité protectrice du mois qui se termine laisse la place à celle du mois qui commence. Les idées d'accomplissement et de départ se rassemblent donc dans ce premier jour de la période. Zéro n'est pas ici associé au vide, à rien, puisqu'il marque une « installation » dans le mois.

Le plus ancien zéro connu remonte à l'an 320 de notre ère. Il figure sur une plaque de jadéite conservée à Leyde (connue sous le nom de Plaque de Leyde). La date est notée « 0 yaxkin », premier jour du mois *yaxkin* dans le calendrier séculier. Le glyphe de ce zéro dérive du pictogramme de l'accession au trône (Cauty, 1 ; Ifrah, 442-3). Il est représenté en bleu sur la figure ci-dessous.



Fig. 1 : reproduction graphique de la Plaque de Leyde (320 ap. J.-C.). Le glyphe de zéro est en bleu. En jaune, le nom du mois et le glyphe de l'accession au trône, presque identique à celui du zéro.

⁶ Pour ce qui suit, voir Ifrah (417-452), Cauty.

Le zéro cardinal est utilisé dans l'indication des durées, exprimées dans le système presque vigésimal des unités de mesure du temps long. Sa représentation a connu diverses variantes. On trouve la première attestation connue de ce zéro sur une stèle datant de 357 ap. J.-C. Le glyphe pour zéro est une fleur (figure 2, partie gauche). Or Selon André Cauty, la fleur est un signe d'accomplissement : « *Sur les monuments, la fleur est une forme ordinaire du zéro des durées, elle possède plusieurs variantes qui semblent corroborer l'idée que le zéro n'est pas un signe du vide et du rien, mais un signe de complétude et d'achèvement (en vision statique) ou de transition et de changement (en vision dynamique). En d'autres termes, le signe du zéro évoque l'instant primordial de tout processus, le liant du cycle "naissance, mort, renaissance"* » (Cauty, 2).



Fig. 2 : à gauche, détail de reproduction de la stèle 19 de Uaxatún (357 ap. J.-C.) avec la traduction de la durée inscrite. À droite, détail du *Codex de Dresde* avec la traduction dans la numération indo-arabe. Source : Intelligence arithmétique maya (<https://iam.hypotheses.org/>).

L'ordre des glyphes est toujours rigoureux et toutes les unités de temps figurent sur les stèles, même lorsque le nombre associé est zéro. Pourquoi introduire un signe pour zéro alors que le système ne le nécessite pas, puisqu'on inscrit les unités de durée ? Contraintes religieuses, rituelles ? En revanche, si on supprime les indications de durée pour ne laisser que la série numérique, il est alors indispensable de faire figurer par un signe l'absence de telle ou telle unité. C'est sur les *codex* que l'on rencontre ces séries numériques sans unités. Le principe d'écriture est le suivant : l'unité est un point et cinq une barre. Avec ces deux symboles on forme tous les nombres-chiffres de 1 à dix-neuf, nécessaires et suffisants dans un système de base vingt. Par exemple :

13 est représenté par :

On peut voir d'autres exemples semblables de nombres, où les barres sont verticales, sur la stèle de la figure 1.

Sur les *codex*, les nombres sont inscrits verticalement et les unités de temps vont en décroissant de haut en bas. La partie droite de la figure 2 montre deux exemples tirés du *Codex de Dresde*, un des quelques manuscrits mayas qui ont résisté au temps. C'est essentiellement un traité de divination et d'astronomie dont la datation est incertaine⁷. Le nombre de gauche est 0 kin ; 12 uinals ; 8 tuns ; 2 baktuns soit une période de $0 + 12 \times 20 + 8 \times 20 \times 18 + 2 \times 18 \times 20^2 = 17520$ jours. Le nombre de droite est intéressant

⁷ <https://www.universalis.fr/encyclopedie/codex-mayas/2-le-codex-de-dresde/>.

car on y voit deux représentations différentes de 0 (en rouge). Le zéro peut prendre en effet diverses formes : représentations de coquilles, de gastéropodes ? Une allusion possible « *au jeu de la vie et de la mort dans l'Inframonde* » (Cauty, 4). Cette manière d'écrire les nombres correspond donc à une sorte de numération de position avec un zéro.

Retour vers l'ancien monde : zéro dans le sous-continent indien

La numération décimale positionnelle

Il est vain de tenter de retracer le développement de concepts comme la numération de position ou le zéro d'après les seuls vestiges matériels. On ne peut qu'émettre des hypothèses. Selon toute vraisemblance, le principe de numération écrite de base dix est né en Inde dans les premiers siècles de notre ère, au plus tard au VI^e siècle (Plofker et *al.*, 142) et dans un contexte d'astronomie. En effet, comme en Mésopotamie, la numération positionnelle était sans doute réservée aux textes savants, et non aux transactions de la vie quotidienne (Keller-Proust, 38). Il est bien sûr possible que l'idée de position ait été imitée de la structure positionnelle babylonienne ou que l'inspiration vienne de la numération décimale positionnelle chinoise⁸, au gré des contacts entre ces civilisations. Il est aussi probable que les calculs aient été primitivement effectués – ainsi qu'en Mésopotamie auparavant – à l'aide d'un abaque à colonne, chaque colonne étant dédiée à une puissance de dix et l'absence d'unité d'un certain ordre étant naturellement notée par un emplacement vide (Keller, 1880). Le système décimal positionnel complet incluant zéro est né dans les premiers siècles de notre ère, sans qu'il soit possible d'être plus précis (Plofker et *al.*, 142-3). À la fin du V^e siècle, on en trouve une description dans l'*Āryabhaṭīya* d'Āryabhaṭa, premier des grands astronomes indiens. Dans le commentaire de cet ouvrage par l'astronome Bhāskara I, en 628, on peut lire, dans la résolution d'un exercice, une expression en sanscrit dont la traduction est : « *zéro-zéro-quatre-zéro-trois-deux-zéro-cinq-cinq-sept-zéro-un-six-zéro-six-neuf-sept-sept-un* ». Expression qui est suivie « *dans l'édition du texte comme dans les manuscrits* » par la notation chiffrée : 1 779 606 107 550 230 400. L'énumération et la notation chiffrée ne se lisent donc pas dans le même sens (Keller 2006, 1885).

Zéro dans un contexte opératoire

À la fin du XIX^e siècle on a découvert dans le Penjab un manuscrit écrit sur des écorces de bouleau, incomplet et en mauvais état, qui parvint à la Bodleian Library à Oxford en 1902. Il est connu sous le nom de *Manuscrit Bakhshālī*. C'est un texte mathématique en vers (*sūtras*) et en prose avec des formules et des exemples de problèmes. La datation par plusieurs experts ne conduit pas aux mêmes conclusions⁹ mais un consensus semble se faire sur la période large de la seconde moitié du premier millénaire. Dans ce manuscrit on trouve écrits des zéros – représentés par de gros points – qui fonctionnent comme des nombres dans un contexte opératoire et pas seulement comme des chiffres dans une numération de position (Plofker et *al.*). Ainsi, le produit des deux fractions ci-dessous dont les (grands) nombres constitutifs contiennent des zéros, suggère une

8 La numération *suān zī* est utilisée depuis l'époque des Han (-206 +220) (Ifrah, 484-5).

9 La datation carbone de trois échantillons donne 3e-4e s., 7e-8e s. Et 9e-10e s. (Plofker et *al.*).

multiplication chiffre par chiffre et donc qu'on opère implicitement avec 0 comme avec n'importe quel autre nombre¹⁰ (Plofker et al., 145) :

$$\frac{108625}{65600} \times \frac{59425}{49200} = \frac{6455040625}{3227520000}$$

Le nombre zéro chez Brahmagupta

Brahmagupta est né vers 598. Mathématicien astronome, il aurait dirigé l'observatoire astronomique d'Ujjain, en Inde centrale, ville sacrée qui est au VII^e siècle un centre majeur de recherches en mathématique. À cette époque, avec l'essor de l'hindouisme, une culture cosmopolite sanscrite s'épanouit et se renouvelle, en Inde et en dehors du sous-continent indien, avec la production de textes en sanscrit qui nourriront plus tard les mathématiques arabes naissantes (Keller, Proust, 38). Brahmagupta travaille au sein de ce climat intellectuel propice. En 628, il écrit le *Brāhma-sphuta-siddhānta*, recueil de vers concis favorisant la mémorisation qui, dans la tradition des traités d'astronomie mathématique, nécessitent d'être commentés. Le but de ces traités est d'identifier la position des corps célestes afin de répondre à des questions concernant le calendrier, la géographie, l'astrologie... Ceci nécessite des mathématiques, auxquelles sont réservés un ou plusieurs chapitres qui outrepassent d'ailleurs le champ de l'astronomie. C'est dans le chapitre qu'il consacre aux procédures dites aujourd'hui algébriques qu'il introduit zéro (*śūnya*) et le positionne à l'intérieur des nombres entiers positifs (avoirs, crédits) ou négatifs (dettes, débit). Il définit les règles des signes pour les quatre opérations (+, -, x, :). Sont reportées ci-dessous uniquement¹¹ celles qui ont un rapport avec 0.

« *La somme de deux biens est un bien ; de deux dettes est une dette ; d'un bien et d'une dette est leur différence, ou, s'ils sont égaux, c'est zéro* ». Zéro est ici un nombre, différence de deux quantités égales.

« *La somme de zéro et d'une dette est une dette ; d'un bien et zéro est un bien ; de deux zéros est zéro*. » Suivent les règles de soustraction, notamment : « *Une dette ôtée de zéro est un bien. Et un bien, ôté de zéro, devient une dette. [...] zéro [moins zéro] est zéro* ». Concernant la multiplication : « *Le produit de zéro et d'une dette ou d'un bien est zéro. Le produit de zéro par zéro est zéro* ». Enfin, la question de la division est plus périlleuse, le texte devient beaucoup moins limpide, surtout lorsqu'il faut diviser par zéro : « *Un bien ou une dette divisé par zéro est une fraction qui a cela [zéro] pour dénominateur* ». Et pour finir, cette assertion fautive : « *Zéro divisé par zéro est zéro* ».

Les mathématiciens à la suite de Brahmagupta envisagent eux aussi la division de 0 par 0. Ainsi, Mahāvīra (IX^e s.), mathématicien originaire du sud de l'Inde, pense qu'un nombre reste inchangé quand on le divise par zéro : « *Une quantité multipliée par zéro est zéro ; elle reste inchangée si on la divise, on l'augmente ou on la diminue de zéro* ». Trois siècles plus tard, Bhāskara II (1114-1185), qui dirigeait l'observatoire de Ujjain, écrit dans le *Lilāvati* : « *zéro ayant été produit en tant que multiplicateur, si, à nouveau, zéro*

10 « *Bakhshālī Manuscript, considered as the carrier of a unified text, includes a concept of written zeros that function as arithmetical operators, i.e., as numbers in their own right, and not merely as place-holder digits. This too fits well with the manuscript's generally-accepted dating to the second half of the first millennium CE.* » (Ibid, p. 145).

11 Traduction de l'anglais, Colebrooke, 339 et suiv.

est diviseur, alors un nombre doit être simplement considéré comme inchangé, de la même manière exactement que diminué et augmenté de zéro»¹².

Pour que zéro entre dans le champ des nombres, il faut le combiner avec les « vrais » nombres dans les opérations usuelles, avec les difficultés que l'on vient de voir. Le *Brāhma-sphuta-siddhānta* est le premier exemple qui nous est parvenu de l'arithmétique des nombres positifs, négatifs et de zéro. C'est un réel changement de paradigme qu'opère ici Brahmagupta et qui s'installe chez les savants postérieurs.

Les mots pour zéro dans les textes mathématico-astronomiques et la philosophie bouddhiste

Le sanskrit abonde de synonymes, il existe donc plusieurs termes pour une même idée : *kha* est utilisé à la fin du V^e siècle par Āryabhaṭa (né en 476) dans le sens de place et deviendra plus tard un nom pour zéro. On rencontre ensuite *ambara*, *ākāśa*, etc. (qui signifient ciel, atmosphère, espace), *bindu* (point) et enfin *śūnya* (vide), qui devient l'appellation la plus courante pour zéro dans un contexte astronomique (Ifrah, 473 ; Kaplan, 45).

Le mot *śūnya* renvoie à l'un des concepts importants de la philosophie bouddhiste. Il faut remonter aux II^e-III^e siècles de l'ère chrétienne et au philosophe Nāgārjuna. Pour ce moine bouddhiste, rien ne possède une existence en soi. Cette absence d'existence propre est traduite par le terme *śūnyata*, vacuité, vide, non-substantialité. Il n'y a pas d'essence, de substrat ontologique. Les choses n'apparaissent qu'en dépendance avec d'autres phénomènes, dont l'existence propre est illusoire. Nāgārjuna se situe entre deux extrêmes, celui de l'existence et celui de la non-existence : sa doctrine est ainsi nommée « la voie du milieu »¹³.

Il paraît plausible que la philosophie bouddhiste ait fourni un terrain fertile pour l'émergence de l'idée de zéro.

Le système de numération indien va connaître une diffusion exceptionnelle ; aux alentours du VIII^e siècle, peut-être grâce à l'influence de bouddhistes venus d'Inde, les calculateurs chinois introduisent l'usage du zéro dans leur numération positionnelle, sous forme d'un petit cercle. Bien d'autres peuples reçoivent la numération positionnelle indienne, grâce à la circulation des hommes, notamment lors d'échanges économiques ou de conquêtes territoriales (voir Ifrah, 487-90). Ainsi, au fil de l'expansion du monde arabo-musulman vers l'Orient, les savants arabes s'approprient de nouveaux savoirs. Ils découvrent la numération indienne, et lui assurent une large diffusion vers le Maghreb puis dans l'espace latin à partir des X^e-XI^e siècles¹⁴.

12 Ces deux citations sont issues d'une conférence de C. Proust en 2014 à Montpellier (communication privée).

13 Carlo Rovelli, *Helgoland. Le sens de la mécanique quantique*, 172-180, Paris, Flammarion, 2020. C'est une doctrine étrangère à la logique dualiste occidentale, mais elle a des échos dans la description de l'univers de la physique actuelle. Voir aussi le site <https://www.soka-bouddhisme.fr/bouddhisme/philosophie/152-le-vide-reservoir-de-linfini>.

14 À côté de la numération indienne, les astronomes utilisent une numération alphabétique (issue des Grecs) ; coexistent aussi d'autres types de calcul, notamment digital ou mental.

Quelles compréhensions du zéro dans les mathématiques de l'Occident médiéval et de la Renaissance ?

Le premier ouvrage en arabe qui présente le système de numération indien a été écrit au début du IX^e siècle par le savant al-Khwārizmī (m. 850), originaire du Khwārezm et établi à la Maison de la Sagesse de Bagdad. Son *Livre sur le calcul indien* a permis de vulgariser le système décimal positionnel, en expliquant son principe et les algorithmes opératoires (les opérations étaient menées sur une « table à poussière », planche recouverte de sable). Aucun exemplaire en arabe n'a été conservé et on ne connaît ce livre que par ses traductions ou adaptations latines qui fleurirent à partir du XII^e siècle, en al-Andalus. Le rôle de ce livre est donc fondamental dans la découverte des « chiffres arabes » au Moyen Âge. L'Italie a joué aussi un rôle important, en particulier grâce aux travaux de Leonardo Fibonacci (*alias* Léonard de Pise), qui décrit par le menu le système de numération et les algorithmes des opérations usuelles dans le *Liber abaci* ou *Livre du calcul* (1202 et 1228). Voici ce qu'il écrit au tout début : « *Les neuf figures (figura) des Indiens sont 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Avec ces neuf figures et avec ce signe (signum) 0, que les Arabes ont appelé zephirum, on écrit n'importe quel nombre* » (Fibonacci 2, traduit du latin). Le mot *zephirum* est décalqué sur l'arabe *sifr*, lui-même traduction du *śūnya* sanscrit. Et signifiant « vide ». *Sifr* a donné d'une part *chiffre* (ou *cifre* au Moyen Âge) qui a donc commencé par signifier zéro (ou rien) et d'autre part *zephirum* en latin et *zéro* en français.

Dans les lectures des nombres, Fibonacci commence par le chiffre de droite, comme les Arabes et les Indiens auparavant. Par exemple : « *Si en premier lieu il y a la figure du neuf (novenarius) et en second zéro (zephirum) et en troisième la figure du deux (binarius), [on obtient] 209* » (Fibonacci 3). Fibonacci décrit ensuite le rôle du zéro final comme opérateur de multiplication par une puissance de 10.

Que ce soit grâce aux adaptations latines du *Livre du calcul* ou aux ouvrages comme celui de Fibonacci, la nouvelle arithmétique se fait connaître en Europe méridionale. Dans un *algorithme* du XIII^e siècle en vers français¹⁵, on peut lire qu'une autre figure est nécessaire au calcul, « *c'est 0, qui ne vaut rien, qui ne crée que de l'ombre et qui dans une certaine mesure encombre le sol et qui pourtant est nécessaire pour écrire les dizaines. Elle seule ne peut porter aucun fruit mais elle donne du sens aux autres. Par certains, dont des clerks très savants, elle est appelée chifre. Mais on l'appelle beaucoup plus couramment cifre* ».

Quelques siècles plus tard, l'auteur anonyme d'un traité manuscrit écrit en français au XVe siècle met en valeur le rôle d'opérateur de multiplication par dix de zéro : « *De cet art sont neuf figures significatives ainsi faites : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et la 10^e est telle 0, nommée chiffre ou zéro, pour ce qu'elle ne vaut rien mais quand elle est ajoutée et mise devant aucune figure significative, elle la fait valoir 10 fois autant qu'elle faisait auparavant* » (Nantes, Médiathèque, ms 456, fol. 3v, écriture en français actuel).

Nous pourrions multiplier de tels exemples. Ces définitions et explications sont d'ordre technique. Le lecteur doit apprendre comment écrire un nombre puis comment calculer dans ce système d'écriture. Ce n'est pas le lieu où se pencher sur la nature de

15 Un *algorithme* est un traité d'arithmétique pratique dans lequel les calculs sont effectués dans le système indo-arabe. Ms Selden Supra 26, Bodleian Library, Oxford. E.G.R. Waters, « A Thirteenth Century Algorithm in French Verse », *Isis* (11), 1928, 45-84 (traduction en français actuel).

ce zéro qui est ici un chiffre marquant l'absence d'une unité dans un ordre donné, et vu comme un opérateur de multiplication par dix lorsqu'il occupe la position finale de droite. On retrouvera encore au XIX^e siècle, dans les traités d'arithmétique élémentaire, une description détaillée des dix chiffres et une insistance particulière et nécessaire sur 0. Mais revenons aux XV^e et XVI^e siècles. Dans la même tradition pratique, mais sous la plume d'auteurs dont la formation intellectuelle est plus approfondie, qui s'intéressent davantage aux fondements, pointent les questionnements sur zéro en tant que nombre. Un frère prêcheur du XV^e siècle nous montre à de nombreux endroits qu'il n'a aucun problème à intégrer 0 dans les calculs sur le même plan que les autres nombres. Il s'interroge, ce qui est plus nouveau, sur les solutions nulles ou négatives qui ne manquent pas d'apparaître dans la résolution de problèmes : « [...] *ce qui reste lorsqu'on soustrait des nombres plus petits s'appelle nombre déterminé, quand on soustrait un nombre égal, il reste 0, qui s'appelle non rien simplement, et quand on devrait soustraire des nombres plus grands, [...] la soustraction se fait forcément en sens contraire et pour cela, ce qui reste s'appelle moins que rien* »¹⁶. Ici, 0 est en quelque sorte la « frontière » entre ce qui est plus et ce qui est moins.

On voit donc progressivement apparaître une réflexion sur la position de zéro parmi les autres nombres, sans que son statut soit explicité. Ce sera fait un peu plus tard dans *l'Arithmétique* que Simon Stevin (1548-1620), brillant ingénieur et mathématicien flamand, publia en 1585. Pour Stevin, est nombre ce qui exprime une quantité. Dans ce cadre, il est difficile de penser zéro comme tel. Lorsqu'il définit les entiers naturels, Stevin écrit : « *Un nombre entier est une unité ou composé de plusieurs unités. 0 est le commencement* ». Zéro n'est pas nombre, il est origine des nombres entiers.

Zéro dans le contexte du calcul infinitésimal naissant (XVII^e siècle)

Le XVII^e siècle est unanimement reconnu comme le « siècle du mouvement ». Mouvements terrestres avec la recherche de trajectoires, de mesures de surface et de volumes, détermination de tangentes, de centres de gravité, etc. ; mouvements célestes depuis que des savants comme Copernic, Kepler puis Galilée ont révolutionné le monde en plaçant le soleil au centre de notre système planétaire. Accompagnant ces nouveaux défis, se pose dans les sciences la question du « calcul de l'infini », infiniment petit ou infiniment grand. Bonaventura Cavalieri (1578-1647), théologien et professeur de mathématiques à Bologne, lance la notion d'indivisible d'une surface ou d'un corps solide. Un triangle quelconque, pour prendre un exemple simple, peut être considéré comme la juxtaposition de toutes les lignes parallèles à un de ses côtés. Ces lignes, qui sont de dimension 1, sont appelées des indivisibles du triangle, surface de dimension 2. De même, un corps solide peut être vu comme « l'agrégat » de surfaces planes, toutes parallèles entre elles. L'usage des indivisibles va permettre aux mathématiciens de découvrir de nouveaux résultats, par exemple des aires jusqu'alors inconnues. Ces indivisibles, formidables outils heuristiques, soulèvent de nombreuses protestations. En effet, on ne peut pas « remplir » une surface avec des lignes, un volume avec des surfaces. Dans son opuscule écrit vers 1658, *De l'esprit géométrique*, Blaise Pascal

16 Spiesser, Maryvonne (éd.), *Une arithmétique commerciale du XV^e siècle, le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de Romans*, Turnhout, Brepols, 2003, fol. 219V, p. 490 (trad. français actuel).

reprend le modèle des indivisibles et le relie à zéro en le transposant au domaine numérique. Voilà son argumentation : un indivisible et une étendue ne sont pas de même nature, car un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et l'étendue est ce qui a des parties séparées. « Ajoutez » autant de lignes que vous voudrez, vous n'en ferez jamais une surface : *« des grandeurs d'un ordre quelconque, ajoutées en tel nombre qu'on voudra à une grandeur d'un ordre supérieur, ne l'augmentent en rien »*. La ligne est un néant de surface, de même que la surface est un néant de volume (Pascal, 405-409). Pascal fait alors le parallèle avec le rapport de zéro aux nombres : à l'image de la ligne relativement à la surface ou de la surface relativement au volume, zéro est un néant de nombre. Ajoutez autant de fois zéro que vous voulez, vous ne pourrez jamais dépasser n'importe quel nombre donné, puisque $0 \times n = 0$. *« Si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres ; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser : de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue. Et on en trouvera un pareil entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps ; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles, non plus que ces indivisibles d'étendue, et par la même raison »* (Pascal, 409-410).

Dans cette comparaison entre un néant de surface et un néant de nombre, on en conclut que zéro, ce n'est pas rien. Si l'on parle en termes d'infiniment petit, une quantité donnée ne change pas si on lui ajoute une quantité infiniment petite car elle n'est pas du même ordre ; ou encore, presque rien serait alors équivalent à rien du tout.

Dans une autre perspective, Pierre de Fermat manipule, dans son premier écrit sur la recherche d'extrema (1636), des quantités nommées e qu'il ne définit pas, qui par une lecture un brin anachronique nous paraissent être infiniment petites, mais sont « autre chose » dans l'esprit de Fermat. Il effectue des calculs avec ces quantités, opère des simplifications par e ou une de ses puissances puis en bout de course, s'il reste encore des e dans ses « équations », il les supprime tout bonnement. Le résultat final est mathématiquement exact. Mais que penser de ce e qui est parfois non nul, parfois nul ?

Les critiques et discussions enflammées autour de ces objets évanescents ne manquèrent pas tout au long des XVII^e et XVIII^e siècles. L'une des plus célèbres fut écrite par George Berkeley, évêque anglican irlandais et philosophe empiriste, qui publia le pamphlet *L'Analyste* en 1734. Il relève la contradiction qui accompagne ces quantités non orthodoxes : *« Lorsqu'on dit faites évanouir les incréments, c'est-à-dire faites que les incréments ne soient rien ou qu'il n'y ait plus d'incrément du tout, on détruit la première hypothèse suivant laquelle les incréments étaient quelque chose... »*. Une réflexion qui fait écho avec ce qui précède.

Dans les méthodes d'avant-garde de ce XVII^e siècle qui vit le balbutiement du calcul différentiel et intégral, les nouveaux objets (qu'ils soient nommés incréments, quantités évanescents, indivisibles ou autres), mal définis mais efficaces, entraînent avec eux une appréhension différente de l'idée de zéro.

Conclusion

L'histoire n'est bien entendu pas terminée et peut être prolongée dans les mathématiques à travers les bouleversements des XIX^e et XX^e siècles. Elle se poursuit aussi avec l'informatique ou la physique contemporaine. Mais arrêtons-nous là. Avec

ces quatre promenades à travers les siècles et les continents, notre intention était de montrer qu'il y a plusieurs zéros, que sous ce nom se cachent des objets différents. Que l'histoire de zéro n'est pas linéaire, qu'elle est dépendante des mathématiques pensées et pratiquées à une époque donnée, nous l'avons vu avec les techniques de calcul en usage, mais aussi de la culture dans laquelle zéro se déploie - ou non.

Bibliographie

Cauty, André, « Zéro, un agent double maya », *Association ethnolinguistique amérindienne* (n. p.), 2013.

<https://f-origin.hypotheses.org/wp-content/blogs.dir/364/files/2013/02/Z%C3%A9ro-agent-double-maya-et-ses-caches-secr%C3%A8tes.pdf>

Colebrooke, Henry Thomas, *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhāscara*, London, Murray, 1817.

Descotes, Dominique, « Pascal. Le calcul et la théologie », *Pour la science*, coll. Les génies de la science, 2003.

Ifrah, Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Paris, Seghers, 1981.

Kaplan, Robert, *A propos de rien : Une histoire du zéro*, Paris, Dunod, 2004.

Keller, Agathe, « Comment on a écrit les nombres dans le sous-continent indien : histoire et enjeux », *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, 150^e année (4), 2006, p. 1879-1896. https://www.persee.fr/doc/crai_0065-0536_2006_num_150_4_88137 (consulté le 30-09-2022).

Keller, Agathe, Proust, Christine, « Il n'y a pas un seul zéro, mais au moins deux ! », *Sciences et avenir*, 9 révolutions scientifiques qui transforment le monde, H.S. (191), oct-nov 2017, p. 36-39.

Pascal, Blaise, *De l'esprit géométrique*, in Jean Mesnard (éd.), *Blaise Pascal, œuvres complètes*, III, Paris, Desclée de Brouwer, 1991.

Plofker, Kim, Keller, Agathe, Hayashi, Takao, Montelle, Clemency et Wujastyk, Dominik, « The Bakhshâlî Manuscript : A Response to the Bodleian Library's Radiocarbon Dating », *History of Science in South Asia* (5.1), 2017, p. 134-150.

Proust, Christine, « Mathématiques en Mésopotamie », *Images des mathématiques*, 2014, <https://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html>, consulté le 20 juin 2022.

Seife, Charles, *Zéro : la biographie d'une idée dangereuse*, Paris, Hachette, 2004.

Staal, Frits, « On the Origins of Zero », in C.S. Seshadri (ed.), *Studies in the History of Indian Mathematics*, Hindustan Book Agency, 2010, p. 39-53.