# L'ARITHMÉTIQUE ET LES MARCHANDS : REGARDS CROISÉS ENTRE COMMERCE ET MATHÉMATIQUES (XVe-XVIe siècle)

Par Mme Maryvonne SPIESSER[1]

*« Quand tu auras appris à l'école / Il te convient de prendre parti / Alors ne sois pas embarrassé / Si tu veux te rendre avec les marchands / Tu dois d'abord apprendre / à bien nombrer, car c'est la voie / Pour plus vite savoir et comprendre / le compte d'or et de monnaie »*[2].

Ces quelques lignes proviennent d'une complainte de plus de mille vers, écrite en 1460 par un marchand lyonnais, François Garin (Garin v. 1089-1096). Il s'adresse à un fils, destiné sans doute à suivre la voie du commerce tracée par son père. Pour ce marchand, la priorité, avant d'embrasser la profession, est de savoir compter. On le comprend aisément, il le précise : il est primordial de savoir calculer pour jongler avec les différentes monnaies d'or ou de compte. Garin est un pragmatique, à l'instar d'autres marchands : « *D'acquérir science nouvelle / Ne veuille être curieux* ». Ainsi, il met son fils en garde contre les «*histoires et beaux livres*», car « *trop les aimer n'est pour le mieux »*, surtout pour ceux qui « *suivent marchandise* ». Mais dans quel cadre ce fils peut-il apprendre à « nombrer » ? Après avoir appris à l'école, écrit le père ; appris la lecture et l'écriture et peut-être déjà des rudiments de calcul dans les « petites écoles ». Et ensuite, est-ce en apprentissage, en suivant un enseignement collectif ou les cours privés d'un précepteur que le jeune homme se formera ? Et que contient cet enseignement ? Autant de questions auxquelles nous allons tenter de donner des réponses partielles. Car les sources sont maigres et disparates, en dehors des sources mathématiques proprement dites.

L'arithmétique peut être théorique ou pratique, une distinction explicite qui remonte au moins à la Grèce ancienne. Dans la philosophie grecque, la pratique (la « logistique ») est dépréciée face à la théorie, plus noble. On retrouve cette hiérarchisation dans les classifications des sciences du Moyen Âge, dans la pensée de la Renaissance, tout en reconnaissant l'utilité donc l'intérêt de la pratique. À l'époque qui nous intéresse, l'arithmétique théorique, ou spéculative, reste dans la continuité de l'arithmétique pythagoricienne et euclidienne, relayée en Europe occidentale par des penseurs comme Boèce au VIe siècle. On y trouve les propriétés des nombres entiers : elles

1 Communication présentée à l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse à la séance du 26 novembre 2021.

2 Toutes les citations en français des XVe-XVIe siècle sont proposées dans une langue française modernisée. Cela implique parfois le choix de mots ou de tournures différents.

sont intrinsèques comme par exemple la notion de parité ou de primalité, ou bien relatives dans l'étude des rapports entre deux ou plusieurs nombres. Dans le contexte du commerce, c'est la seconde branche des nombres qui est utile. Les sources dont nous disposons comprennent divers documents d'archives (Spiesser 2008a 85-89), des manuels de techniques commerciales (*Pratica della mercatura* en Italie) qui, sans oublier les conseils d'ordre moral, renseignent le marchand sur de nombreux aspects pratiques : données sur les poids, mesures, monnaies et règles d'échange, types de marchandises, marchés et foires, voies et moyens de transports, douanes et pourboires… Les livres des changeurs, les livres de compte peuvent nous fournir des indications sur la manière de calculer. Enfin, nous avons conservé de nombreux témoignages sur l'arithmétique pratique à travers des manuscrits puis des livres imprimés écrits dans une perspective pédagogique. C'est ce corpus des arithmétiques dites commerciales ou marchandes que nous considérerons.

## Naissance d'un genre, l'arithmétique commerciale

Il n'est pas facile de se faire une idée nette du savoir mathématique des marchands à l'époque de la Renaissance, qui est intimement lié à l'importance du commerce pratiqué. Du marchand-banquier au marchand rural, s'échelonnent toutes sortes d'activités commerciales et il est difficile de distinguer nettement des catégories. Les associations se font entre hommes d'affaires de grande envergure mais également à l'échelon des petits ou moyens marchands dont le rayon d'action n'est pas important. Pour prendre un exemple local, le florissant circuit commercial du pastel était majoritairement composé d'illettrés : un négociant du nom d'Agarn fait signer ses reconnaissances financières par un serviteur, comme si « *icellui Agarn les avait faictes, combien que icellui Agarn ne scayt lire ne escrire* ». D'où la présence de marques de propriétaires dessinées sur les sacs d'agranat (Caster 61-62).

## Les cités italiennes à l'avant-garde de l'économie européenne

Entre le XIV$^{e}$ siècle et la première moitié du XVI$^{e}$ siècle, apparaît en Europe occidentale un nouveau genre d'ouvrage, le livre d'arithmétique pratique destiné en premier lieu aux marchands. En Italie, on a répertorié au moins trois cents manuscrits et cent cinquante livres imprimés de ce type antérieurs à 1600 (le plus ancien traité connu écrit en langue vernaculaire date de 1290) (van Egmond 3-33).

L'Italie est pionnière dans ce domaine, ce qui n'est pas pour étonner : dès le XI$^{e}$ siècle, les grands ports de Pise, Gênes, Venise commercent avec le Levant pour obtenir des produits de luxe (soies, épices) ou plus courants (blé, vin, huile…) et pour exporter draps et produits fabriqués variés. Venise affiche sa suprématie aux XIII$^{e}$-XIV$^{e}$ siècles et des cités de l'intérieur comme Milan ou Florence se distinguent dans l'ndustrie et le secteur bancaire. Ces villes, dont certaines atteignent 100 000 habitants au XV$^{e}$ siècle, correspondent aux lieux d'écriture de la plupart des traités pour les marchands. Et même si Gênois et Vénitiens ne dominent plus le commerce méditerranéen au XV$^{e}$ siècle, l'Italie de la Renaissance se tient cependant toujours à l'avant-garde de l'Europe des affaires (Fourquin).

L'ampleur du rayonnement des grandes cités italiennes dans l'économie européenne explique que ces villes soient à l'origine des innovations de plus en plus sophistiquées en matière de commerce et de finance (lettre de change, dès 1300, tenue des comptes en partie double, sociétés commerciales, développement des prêts à intérêt, etc.).

L'expansion du commerce vers des pays lointains et de manière plus générale la complexification des échanges, tout cela a des répercussions sur les exigences en matière de mathématiques. On trouve dans les archives des documents qui montrent combien la classe bourgeoise attache d'importance à une formation mathématique : ainsi, en 1386, le Conseil de Lucques recherche un maître d'arithmétique qui enseigne aux enfants « *afin qu'ils soient à la fois plus fins et plus prudents dans ce qui touche au négoce* »[3]. Et dans son testament de 1420, un médecin vénitien demande que ses enfants, après l'école élémentaire où ils apprendront à écrire et parler avec élégance, « *soient mis à l'abaque, pour qu'ils apprennent à commercer* »[4]. Des écoles laïques se montent, privées ou publiques, pour procurer un enseignement mathématique adéquat. Elles pallient ainsi l'insuffisance de l'enseignement existant dans ce domaine. Elles s'appellent écoles ou boutiques d'abaque (*Botteghe d'abbaco*), un nom que l'on commentera plus loin. Les maîtres sont des « maîtres d'abaque », souvent venus du négoce, parfois très instruits et impliqués dans le mouvement humaniste, qui écrivent des « traités d'abaque » (Brizzi).

Dans la plupart des autres pays d'Europe, le même phénomène est observé, mais se fait jour plus tard et à moindre échelle. Le développement plus tardif et/ou l'intensité moindre des échanges commerciaux en sont responsables en partie[5]. En France, par exemple, c'est au XV^e siècle qu'apparaissent les ouvrages équivalents aux traités italiens, en nombre infime (une quinzaine) en comparaison de la centaine d'ouvrages italiens pour la même période des 14^e-15^e siècles. Quant à l'existence d'un enseignement collectif étendu, elle est beaucoup plus difficile à prouver (Spiesser 2003 81-89). N'oublions pas enfin que l'apprentissage sur le tas - impossible à mesurer - revêtait une importance capitale.

## À quels publics sont destinés ces livres ?

Là encore, il faut distinguer l'Italie des autres pays européens. En Italie, la grande diversité des ouvrages, que ce soit par le contenu ou la qualité de la facture, renvoie à des destinataires et des usages multiples que nous ne détaillerons pas ici. Prenons quelques exemples, en Espagne et en France. Dans les années 1460-70, l'auteur d'un *Traicté de la praticque d'algorisme* promeut ainsi l'algorisme (cf note 11) : cette science, écrit-il, « *est utile et convient à toutes sortes de gens, parce que, grâce à elle, on peut prestement et avec légèreté faire tous les comptes et tous les problèmes tant en toutes marchandises, en fait de change, en géométrie, en astronomie qu'en bien d'autres négoces. Lesquels comptes et problèmes ne pourraient tout bonnement se faire sans grande fatigue et* rompement *de tête, si ce ne fût au moyen de cette science* »[6]. Un peu

---

3 *« uti in mercationibus inde sint et subtiliores et cautiores »,* d'après Fanfani, Amintore, « La préparation intellectuelle et professionnelle à l'activité économique en Italie, du XIV^e au XVI^e siècle », *Moyen Âge* (17), 1951, 327-346, p. 331.

4 « *ad abacum, ut discant ad facere mercantias »,* (*Ibid.* 331) et (Brizzi 199).

5 Au XIV^e siècle, les cités de la Hanse teutonique sont à l'apogée de leur puissance. On pourrait dresser un parallèle entre la suprématie hanséatique dans la Baltique et celle des grands ports italiens en Méditerranée. Mais jamais les capitaux brassés n'ont été aussi importants qu'en Italie, les techniques du commerce étaient moins sophistiquées, les associations plus restreintes (Fourquin, p. 227-232).

6 Anonyme, *Traicté de la praticque d'algorisme*, ms Cesena, Bibl. Malatestiana, S XXVI-6, ca 1476, f. 7r.

plus tard, un auteur lyonnais traduit en français un traité d'arithmétique en castillan dû au frère prêcheur Juan Ortega (1512). Dans sa préface, ce dernier met l'accent sur son devoir chrétien de formation face aux risques de tromperies à l'égard de ceux qui ne savent pas manier les comptes : « […] *pour extirper et arracher ces fautes par lesquelles Dieu est grandement offensé, par les tromperies quotidiennes envers les gens simples qui n'entendent que peu ou rien aux comptes, et aussi pour qu'il ne me soit pas reproché d'avoir enfoui sous terre ce trésor que Dieu m'a donné, j'ai proposé de composer un petit traité d'arithmétique, autrement dit* chiffre*, et aussi de géométrie. Non pas comme un grand arithméticien mais comme un petit conteur parmi les moindres en la dite science, pour seulement montrer ce qui est nécessaire pour compter dans tous les comptes relatifs aux marchandises comme les compagnies, les trocs,* […] »[7].

Le lectorat, avant tout des marchands ou futurs marchands, s'élargit avec le temps. Gens de loi, artisans, préposés aux comptes sont mentionnés par le professeur et auteur niçois Jean-François Fulconis au milieu du XVI[e] siècle : « […] *cette science* <l'arithmétique> *apporte une aide générale, plus importante pour certains que pour d'autres, aide très importante pour les marchands […], sans oublier les banquiers, les chargés de négoce, les fabricants de monnaie, les receveurs, les trésoriers […], ainsi que toutes sortes de techniciens comme sont les drapiers, les tisserands, les menuisiers*… »[8]. Pour faciliter l'accès de ces textes au plus grand nombre, le latin a cédé la place à la langue vulgaire. Le même Fulconis, s'adressant aux étudiants niçois, déclare : « *Tu t'étonnes peut-être de ce que ma théorie est exposée en langue maternelle ; j'écris pour ceux qui ne connaissent pas la langue du dehors*[9] ». Et dans un prologue en vers, parlant de son livre, il écrit : « *Je l'ai fait dans la langue usuelle / de cette cité et courante en Provence ; / Car cette langue, pour les petits et les grands, / est plus commune pour apprendre la théorie* »[10]. Enfin, n'oublions pas dans ce public les « jeunes gens qui désirent savoir » (des écoliers?) comme le mentionne le traducteur de Juan Ortega.

## Un enseignement au service des marchands ?

### *Le calcul, outil de travail du marchand*

Deux principaux types d'écriture des nombres (avec les méthodes de calcul associées) coexistent, qui n'ont pas perduré de la même manière selon les contrées. La transmission à l'Europe de la numération positionnelle de base dix, utilisant les chiffres indo-arabes, a donné naissance dès le XIII[e] siècle à l'écriture d'ouvrages nommés algorismes[11]. Les fameux traités d'abaque italiens sont en fait des algorismes, et il ne faut pas les

7 Juan Ortega, *Arte de l'arismetica,* impr. Lyon, 1512, traduit en français par Claude Platin (*L'art et science d'arismeticque et geometrie translaté nouvellement d'espaignol en françoys*, impr., Lyon, 1514).

8 Jouan-Francès Fulconis, *Cisterna fulcronica*, 1562, Rocca, Roger éd. Et trad., Nice, Lou sourgentin, 1996, 97.

9 *Ibid*., 91.

10 *Ibid*., 95.

11 Le mot *algorismus* vient du nom du mathématicien de Bagdad Al-Khwārizmī, mort en 850, auquel nous devons un traité sur « le calcul indien » connu en Europe à travers ses traductions et interprétations latines du XII[e] siècle. Le mot algorisme a plus récemment évolué, dans une acception différente, en algorithme.

confondre avec les traités enseignant le calcul sur l'abaque, à l'aide de jetons que l'on déplace sur des lignes ou à l'intérieur de colonnes tracées sur une surface quelconque. Ce deuxième type de calcul fonctionne en général de pair avec une représentation des nombres à l'aide des chiffres romains. C'est une méthode déjà en usage dans l'antiquité gréco-romaine, qui cohabite longtemps avec le calcul indo-arabe, mais à la fin du Moyen Âge, elle est surtout répandue au nord de l'Europe, l'algorisme ayant d'abord conquis les zones méridionales. Certains traités proposent aussi les deux méthodes. Dans le *Livre de chifres et de getz*, publié anonymement à Lyon en 1502, on lit en avertissement : « *dans ce petit livre est contenue premièrement l'arithmétique qui se fait avec les jetons* (les *getz*) *pour ceux qui ne savent pas écrire, puis pour ceux qui savent l'écriture est montrée ladite arithmétique par chiffres* ». Toutefois, le partage n'est pas si net ; on peut trouver les deux types d'écriture réunis dans un même document, comme dans ce traité de marchandise[12] écrit vers 1385 en catalan, où une division est effectuée avec les chiffres indo-arabes dans la marge, qui laisse penser que même lorsque les résultats sont donnés en chiffres romains, les calculs peuvent avoir été menés avec les techniques de l'algorisme. Ce n'est donc pas si simple de se faire une bonne idée des méthodes et des habitudes.

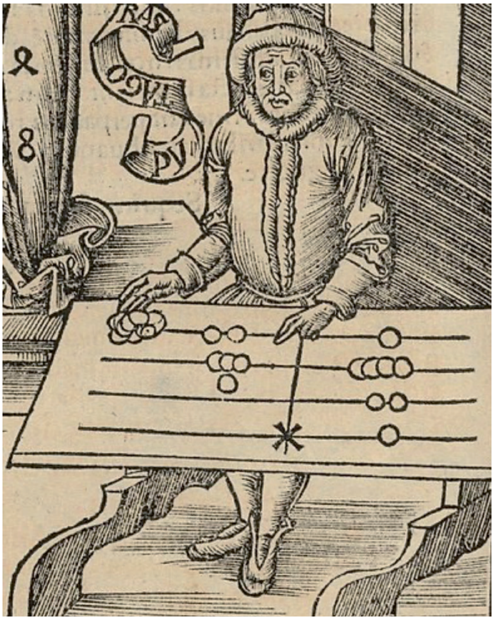


Fig. 1. *Arithmetica* (détail), Reisch, *Georg, Margarita philosophica*, Bâle, 1508 : le calcul sur l'abaque. Les deux nombres positionnés sont : à la droite du calculateur : 2 + 3 x 10 + 50 = 82 et à sa gauche : 1 + 40 + 200 + 1000 = 1241. Wikimedia Commons : https://wellcomecollection.org/works/s326qf59 (domaine public, pas de droits).

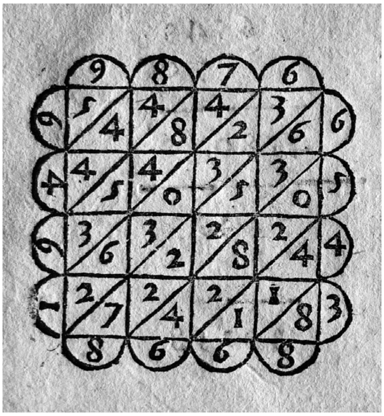
Pour décrire le détail des mathématiques enseignées dans les arithmétiques commerciales, je m'appuierai essentiellement sur les traités produits en France méridionale entre le XVe et le XVIe siècle (avec quelques incursions dans la Péninsule ibérique). Ce sont tous des algorismes, ils sont écrits en français ou en occitan, ils ont le mérite de constituer un ensemble assez homogène et de proposer un enseignement complet, des méthodes de calcul aux problèmes[13].

12 *Libre de conexenses e de avissaments de pessos, canes e massures de diverses terres,* Gual Camarena, M. trad. *El primer manuel hispanico de mercaderias (siglo XIV)*, Consejo superior de investigaciones científicas, Instituto de geografía, etnología e historia, Barcelone, 1981.

13 En Italie, la variété est beaucoup plus importante, des brouillons aux manuscrits ornés, et souvent l'auteur suppose les opérations élémentaires déjà connues.

## Apprendre à compter et à maîtriser les techniques opératoires sur les entiers puis sur les fractions

Avant de maîtriser les techniques opératoires, il faut savoir lire les nombres, les écrire avec des symboles ou, dans le cadre d'un calcul « par les gects », les disposer sur la table à calculer avec des jetons. Puis vient l'apprentissage des opérations, d'abord sur les entiers, ensuite sur les fractions, plus précisément sur les nombres dits « rompus », fractions comprises entre 0 et 1, qui proviennent, comme leur nom l'indique, du partage d'un nombre donné en parties. Aux quatre opérations usuelles vient souvent s'ajouter le calcul exact ou approché des racines carrées et cubiques.



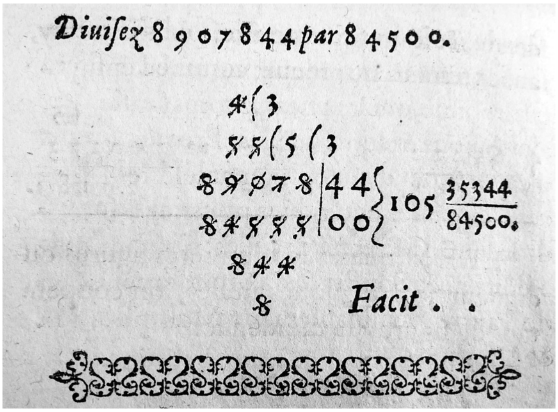



Fig. 2. Francesco Feliciano da Lazisio, *Libro di arithmetica & geometria speculativa & praticale*, Vérone, 1526. Toulouse, Bibliothèque d'études et du Patrimoine, Res C XVI 299, f. Dr et Dv.
À gauche : multiplication par jalousie : 9876 x 6543 = 64 618 668. Chaque chiffre est obtenu en ajoutant les nombres de la diagonale correspondant à son rang, en procédant de droite à gauche et en tenant compte des retenues. Par exemple le chiffre des dizaines est 6 car 4 + 1 + 1 = 6 ; le chiffre des dix milliers est 1 car : 3 + 2 + 3 + 0 + 3 + 6 + 2 + 2 (retenue des milliers) = 21.
À droite : Division par gallée de 8 907 844 par 84 500. Le résultat (entier + fraction) est 105 + 35344/84500. Autorisation de la bibliothèque d'études et du patrimoine de Toulouse

Les techniques une fois expliquées, elles sont mises à l'épreuve sur des exemples concrets, c'est-à-dire avec des nombres « complexes » représentant des unités de monnaie, de mesure ou de poids. En voici un exemple : « *On a vendu 25 marcs 4 onces d'argent, item 18 marcs 7 onces 13 deniers 15 grains 12 garrobes, item 46 marcs 3 onces 19 grains, item 67 marcs 21 deniers 22 garrobes. Item 5 onces 23 grains 20 garrobes, item 30 marcs, item 3 marcs 2 onces 16 denier 12 gr. À savoir à combien monte le tout* »[14]. Le résultat est inscrit en bas d'un tableau : 191 marcs, 2 onces 3 deniers 25 grains et 10 garrobes. La présence de kyrielles de sous-unités trahit souvent l'objectif pédagogique (entraînement aux calculs et aux conversions d'unités) au détriment de la pratique réelle. De même, alors que les traités fourmillent de calculs avec des fractions, en examinant les comptes de marchands

14 *Traicté de la praticque d'algorisme*, f. 27v.

de moyenne envergure en France, ou bien les livres de changeurs, il apparaît clairement que cet apprentissage est disproportionné par rapport à l'usage qui en est fait professionnellement. La manipulation des fractions est réputée difficile et les divisions multiples des unités en sous-unités sont un moyen de les éviter. De plus, des fractions écrites en toutes lettres comme demis, tiers, quarts ou dixièmes désignent plutôt des sous-unités de mesure. Par exemple, le marchand toulousain du XVe siècle Jean Lapeyre écrit dans ses comptes « *III quartz et demy* »[15], mais jamais 7/8. Les fractions apparaîtront plus couramment avec l'utilisation accrue des chiffres arabes. On écrira alors souvent « demi », « tiers », mais 1/5 ou 1/8 (Benoit 1992).

## *La règle de trois, règle d'or du marchand*

La règle de trois, fondée sur la proportionnalité, est indispensable et suffisante pour la plupart des problèmes qui se posent au marchand (Spiesser 2011). C'est la seule règle mathématique qu'il faille vraiment connaître pour acheter, vendre, savoir gérer ses affaires. Dans les ouvrages, on part d'un exemple élémentaire, souvent du type : « si 6 valent 18, que vaudront 9 ? ». On énonce la règle : *multiplie ce que tu veux savoir par son contraire et puis divise par son semblant*. On l'applique ensuite immédiatement à des problèmes de monnaies, de marchandises vendues à la mesure ou au poids. En commençant par des exemples simples, tel celui-ci : « *Si 3 florins d'Avignon valent 2 francs de roi, combien vaudront 20 florins d'Avignon ?* »[16]. Ce que l'on veut savoir, c'est-à-dire dont on cherche la valeur en francs, ce sont les 20 florins ; qu'on multiplie par son *contraire*, à savoir les 2 francs, et qu'on divise par son *semblant*, les 3 florins. Le résultat est 13 francs et 1/3 de franc. Les opérations peuvent être schématisées dans un diagramme associé à une procédure de calcul, surtout si la présence de fractions complique le problème comme dans l'exemple « *Si 5 aunes 1/4 valent 6 florins, combien vaudront 12 aunes de la même sorte* », illustré dans le schéma ci-dessous.

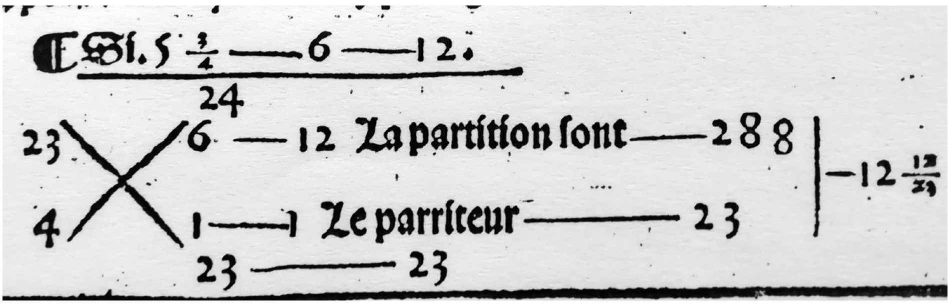



Fig. 3.Règle de trois. Platin, Claude, *L'art et science d'arismeticque et geometrie translaté nouvellement d'espaignol en françoys*, impr., Lyon, 1514, f. 59r. Bibl. nat. France, Res P-V-369. On note les trois nombres dans l'ordre de l'énoncé, séparés par des tirets. On doit multiplier 12 par 6 et diviser par 5 3/4. Ensuite il y a le passage délicat de réduction au même dénominateur. Les trois nombres sont 23/4, 6/1 et 12/1, donc le résultat est (12 x 6 x 4)/(23 x 1 x 1). Cela explique le schéma : 4 x 6 x 12 = 288 (dividende ou partition) ; 23 x 1 x 1 = 23 (diviseur ou partiteur). Le résultat est 12 + 12/23.

15 Il faut comprendre trois quarts et la demie d'un quart, soit 3/4 + 1/8.

16 Jehan Certain, *Kadran aus marchans*, ms Paris, Bibl. Arsenal 2904, 1485, f. 32r.

Fluctuation des monnaies, change, alliages, troc, répartition des gains ou des pertes dans des sociétés, intérêt simple, tout relève de cette « règle d'or » ou de ses variantes. Mais si la règle initiale est simple, les raisonnements qui l'environnent sont parfois fort complexes. À partir de la règle de trois d''autres règles sont en effet déclinées, fondées sur elle mais exprimées comme des règles nouvelles à savoir par cœur. Prenons quelques exemples et tout d'abord celui des compagnies commerciales. Avec la complexification des affaires, les ventes de plus en plus lointaines, les marchands ont compris la nécessité de se regrouper en sociétés. Plusieurs types d'associations ont vu le jour, une fois de plus en Italie, dont les deux principaux sont la *Commande*, née dans les ports de la Péninsule italienne dès le XIe siècle, et la véritable *Société*, dite aussi C*ompagnie*, née dans les villes de l'intérieur. Qui fut d'abord familiale et de courte durée. Les différents associés apportent chacun un capital et partagent le bénéfice ou les dettes proportionnellement à leur apport. Outre leur stabilité, leur durée, la possession de correspondants ou de fondés de pouvoir au loin, les compagnies peuvent vendre à crédit et se sont souvent dédoublées en banque de dépôt et de change. Une puissante compagnie, comme celles de Toscane ou la compagnie allemande Fugger au XVIe siècle, pouvait regrouper jusqu'à cinq cents personnes. Elles avaient quinze à vingt succursales de par le monde, de la mer du Nord au Levant. Les sociétés moyennes, beaucoup plus nombreuses, pourvues de capitaux plus faibles, ont aussi une durée de vie plus brève, parfois moins d'un an. C'est par exemple le cas des compagnies du Lauragais liées au pastel, dont il a déjà été question (Fourquin 308-314).

Dans les traités d'arithmétique commerciale, le sujet des compagnies, des contrats et ruptures de contrat dans les associations, est abondamment illustré. Les exercices sont des répliques de la réalité économique, en modèle réduit, modèle qui s'adapte à de petites sociétés de deux ou trois personnes et non à de grandes compagnies internationales. Les partages sont fondés sur la proportionnalité, donc sur la règle de trois. Une règle à part entière se met en place, baptisée naturellement « règle de compagnie ». Jehan Certain, auteur d'un *Kadran aux marchans* (1485), propose cet exemple : trois marchands forment une compagnie ; l'un met 100 écus, un autre met 80 écus et le troisième en met 60. L'apport total est donc 240 écus. Le contrat terminé, ils ont gagné en tout 100 livres. Comment doit-on partager un tel gain afin que chacun ait son *« esgalle portion ce qu'il a mis »*[17]. Voici comment l'exprime Jehan Certain : « *par chaque <mise> multiplie et par toutes ensemble divise* ». Ce qui signifie : par chaque mise ($m_k$) multiplie le gain total $G$ et divise par la somme $M$ des mises. Le résultat sera le gain $g_k$. En effet, les quantités $M$ et $G$ sont proportionnelles à $m_k$ *et* $g_k$*;* on peut donc appliquer la règle de trois pour trouver le gain de chacun connaissant les trois autres nombres. Ainsi, dans l'exemple précédent, le premier aura 100/240e du gain réalisé, le second 80/240e et le troisième 60/240e. La règle de compagnie est tellement courante et banalisée qu'elle est devenue une véritable règle mathématique exprimée par une phrase du type précédent. Ce qui est mathématiquement intéressant, c'est que la règle finit par être appliquée à des problèmes qui n'ont rien à voir avec la répartition dans une compagnie mais qui peuvent être modélisés selon ce schéma.

Le deuxième exemple est relatif au troc. À une époque où le numéraire fait souvent défaut, les marchands doivent parfois troquer tout ou partie de leurs marchandises. Un produit troqué est surévalué par rapport à son prix en monnaie d'échange ; les calculs peuvent devenir très compliqués si les trocs sont partiels (troc composé), ou si le

---

17 Jehan Certain, *Kadran aux marchans,* 1485, f. 41r-v.

paiement se fait à terme (troc avec le temps). Cela peut être un véritable casse-tête. Dans les traités, des règles précises sont énoncées, pour faire en sorte que l'échange soit juste, que personne ne soit lésé. Voici un exemple de troc « composé », dans lequel une partie de la marchandise est vendue au comptant : « *Deux marchands veulent échanger leurs marchandises ; toute la marchandise de l'un vaut 60 florins à vendre argent comptant ; il veut la survendre en troc 80 florins et veut avoir 40 florins en argent comptant et le reste en marchandise. On demande combien l'autre marchand doit lui survendre la partie de sa marchandise qui vaut 9 florins à vendre argent comptant* »[18].

Ajoutons quelques mots sur les calculs d'intérêt. Outre que les mathématiques impliquées ne relèvent plus de la règle de trois dans le cas où l'intérêt est composé, ils posent un autre problème aux auteurs : l'interdiction de l'usure par l'Église. Du fait de ces deux handicaps, le sujet est moins largement traité dans les ouvrages. Un maître florentin fameux de la fin du XV^e^ siècle prend bien des précautions avant d'aborder ce chapitre : « *Bien que le gain réalisé selon le présent chapitre soit prohibé par la loi chrétienne, néanmoins, on montrera la manière <de procéder>, non pour que tu aies envie de faire une telle chose, mais afin que, si cela t'arrive, et que tu as reçu une certaine quantité d'argent, tu saches faire les comptes de manière à ne pas avoir une perte double et à ne pas donner le double de ce qui était convenu* »[19].

### *Des règles « historiques » pour résoudre des problèmes variés*

Hormis la règle de trois, dont le marchand fait un usage courant, d'autres règles figurent dans les traités d'arithmétique commerciale, dont l'intérêt pratique est nettement moindre, voire inexistant. Ce sont les règles de simple ou de double fausse position (Spiesser 2003, 38), dont on trouve déjà l'esprit, pour la seconde, dans les mathématiques de la Chine ancienne et qui ont perduré jusque dans les manuels scolaires du début du XX^e^ siècle (sous le nom de « fausse supposition »). Comme leur nom l'indique, c'est à partir de valeur(s) supposée(s) que l'on obtient, en appliquant une recette, la valeur exacte cherchée. Ce sont des méthodes qui ont longtemps pallié l'absence d'algèbre dans les résolutions de problèmes élémentaires, tel celui-ci : « *Un homme entre en foire et le premier jour double tout son argent et dépense 1 gros. Item le second jour il triple l'argent qui lui était demeuré et dépense 2 gros. Item le troisième jour il quadruple tout l'argent qui lui était demeuré et dépense 2 gros. Et il trouve à la fin qu'il ne lui est demeuré que 3 gros. On demande combien d'argent il avait le premier jour qu'il entra en foire* »[20]. Ces règles s'appliquent généralement à des questions que l'on traduirait aujourd'hui par des équations du premier degré ou des systèmes linéaires. Souvent posées dans un contexte commercial ou plus largement de la vie sociale (comme dans l'énoncé précédent), elles n'ont aucun côté pratique. Il s'agit davantage d'entraîner le lecteur aux mathématiques en sacrifiant en même temps à la tradition, car nombreux sont les problèmes posés qui ont parcouru les siècles. C'est le cas de celui qui est cité plus haut. À ces problèmes « pseudo-concrets », associés à des règles de résolution bien

---

18 *Traicté de la praticque d'algorisme,* ca 1476, f. 43v.

19 Pier Maria Calandri, *Tractato d'abbacho*, Bibl. Medicea Laurenziana, éd. G. Arrighi, Testimonianze di storia della scienza, ch. 18, Pise, Domus galileana, 1974. La traduction française est la mienne.

20 *Traicté de la praticque d'algorisme,* ca 1476, f. 88v-89r. L'équation correspondant à ce problème est $4[3(2x - 1) - 2] - 2 = 3$.

précises, viennent souvent s'ajouter des énoncés récréatifs, qui forgent l'habileté au calcul ou au raisonnement logique, comme le célèbre problème du loup, de la chèvre et du chou[21] (Spiesser 2017).

Les arithmétiques commerciales renferment fréquemment un chapitre dédié à la géométrie pratique - calculs d'aires, de volumes et autres activités de mesurage - et nous renseignent indirectement sur les habitudes des marchands, sur les denrées présentes sur le marché, les monnaies, poids et mesures, sur les lieux de négoce, et aussi sur les techniques commerciales du temps. Elles reflètent les préoccupations des marchands - du moins de ceux dont les affaires sont suffisamment importantes pour qu'un tel apprentissage soit justifié - et cette volonté est souvent exprimée dans les préfaces. Si Jehan Certain nomme son traité le *Kadran aus marchans*, c'est en référence au cadran solaire qui nous guide en nous renseignant sur l'écoulement du temps. Son ouvrage sera lui aussi un guide pour le marchand en lui apprenant à bien compter afin de pouvoir acheter et vendre en respectant le droit de chacun [(f. 2r)]. Les auteurs ne revendiquent aucune originalité. Ils n'ont pas la prétention d'être inventeurs ni même novateurs, ils transmettent fidèlement des pratiques, ils enseignent des savoir-faire. La vocation pédagogique de ces ouvrages s'exprime dans le style : pas de définition, pas de théorèmes avec des démonstrations, mais des règles présentées comme des recettes, des suites d'instructions non justifiées et pour certaines correspondant à des raisonnements non élémentaires que l'auteur ignore certainement. Il faut dire que le fonds mathématique est repris d'un traité à l'autre et ceci depuis des siècles pour certains sujets ou problèmes. L'efficacité toute pragmatique répond aux objectifs : apprendre au marchand à reconnaître, dans les situations qu'il rencontrera, des situations mathématiques qu'il saura appliquer. C'est pourquoi l'exemplification est primordiale. Il y a toutefois un décalage sensible entre le contenu de ces livres et l'utilisation effective que le marchand « moyen » fait des mathématiques. En effet, l'application des règles doit souvent davantage à l'expérience qu'à une bonne maîtrise mathématique. Les chapitres sur les fractions vont certainement bien au-delà de ce que la majorité de ces marchands a assimilé. Nous le pressentons à travers l'examen de comptes ou autres documents associés au commerce : beaucoup de chiffres romains, peu de fractions. Enfin, nous l'avons vu, des chapitres entiers entraînent aux mathématiques mais n'ont aucune utilité directe pour le négoce.

## Regards croisés : quel impact sur l'évolution des mathématiques ?

Les auteurs d'arithmétiques commerciales, pour ce que nous en savons, ne forment pas un groupe homogène, par leur formation et leurs intérêts professionnels ou intellectuels. Certains sont marchands, ou proches des marchands, d'autres appartiennent à des ordres religieux, surtout urbains comme les ordres mendiants. Si leur rôle essentiel est effectivement d''enseigner des savoir-faire utiles, il serait toutefois inexact de les réduire tous à de simples passeurs. Là où ce terrain devient intéressant,

21 Un marchand doit faire passer une rivière à un loup, une chèvre, un chou. Il ne peut transporter qu'une des trois marchandises à chaque fois. Sachant que le loup ne doit pas se trouver seul sur la rive avec la chèvre, parce qu'il la mangerait, ni la chèvre avec le chou pour la même raison, quel nombre minimum de voyages le marchand doit-il effectuer d'une rive à l'autre pour faire traverser toutes ses marchandises ?

c'est lorsque des hommes compétents, intéressés par les mathématiques, s'investissent. Car ils font alors part de leurs réflexions et ouvrent de nouvelles perspectives, timides certes mais rétrospectivement intéressantes à observer : élargissement de la notion de nombre, réflexion sur les quantités négatives, début de mathématisation du hasard, etc. Nous développerons le premier et le troisième point.

### *L'élargissement de la notion de nombre aux fractions*

Dans la philosophie grecque, seuls les nombres entiers (positifs) ont le statut de nombre. Défini comme une multitude composée d'unités dans les *Éléments* d'Euclide (Livre VII, déf. 2) au III$^{e}$ siècle avant notre ère, le nombre entier exclut l'unité, qui en est le principe. Dans le contexte pratique du commerce, le nombre est objet de calcul et non de spéculation théorique. En conséquence, très peu d'arithmétiques commerciales (au moins dans le domaine français) ne s'attardent sur l'aspect conceptuel. Les problèmes posés sont induits par l'activité de mesure, on opère avec des nombres concrets dans des activités concrètes. Or, en l'absence de l'écriture décimale avec virgule aujourd'hui banalisée, toute opération de partage d'entiers génère des fractions, dont on ne se débarrasse que grâce à une kyrielle de sous-unités. Par le jeu des divisions, tout résultat rationnel est obtenu sous la forme[22] $a + p/q$, dans laquelle $a$, $p$ et $q$ sont entiers et $0 < p < q$. Cette écriture, conséquence de la définition du nombre rompu, est aussi le reflet d'une pratique, car elle y prend tout son sens et tout son intérêt : on se représente mieux 254 + 5/12 livres que 3053/12 livres.

Dans les arithmétiques marchandes, les nombres sont donc répartis en entiers, rompus et nombres « mixtes », sommes d'un entier et d'un rompu ; trois catégories issues des calculs concrets et considérées comme valeurs numériques plutôt que comme quantités abstraites. Cette classification ordonne les applications numériques, selon une difficulté technique croissante. Du fait que les nombres entiers et les nombres dits rompus sont intimement associés dans le calcul, leur statut, même lorsqu'il n'est pas explicité, est sensiblement le même. Nicolas Chuquet, un bachelier en médecine qui écrivit en 1484 le *Triparty en la science des nombres,* précise ses idées sur le nombre : « *le nombre, en tant qu'il convient à notre propos, est pris ici largement, non pas uniquement comme collection de plusieurs unités mais <il peut être> aussi 1 ou une ou <plusieurs> parties de 1 comme est tout nombre rompu* ». Chuquet fait donc entrer l'unité dans le concept de nombre, et il y place aussi les parties de l'unité[23], soit les fractions comprises entre 0 et 1. D'autres sont plus frileux en admettant que le nombre rompu n'a pas la perfection du nombre entier, voire n'est pas vraiment un nombre, même s'ils en usent et le nomment comme tel (Spiesser 2011, 106 ; Spiesser 2008b, 309-312).

### *Le goût du risque vs le coût du risque : mathématisation du hasard*

Le monde du marchand est un monde du risque où le hasard est omniprésent. Une expédition outre-Atlantique est soumise aux aléas des intempéries, de la rencontre

---

22 a et *p/q* sont juxtaposés, le signe + n'est pas utilisé. D'autre part, les fractions sont écrites comme nous le faisons aujourd'hui, avec une barre horizontale.

23 Chuquet, Nicolas, *Triparty en la science des nombres*, Paris, BnF, ms fr. 1346, 1484, f. 33v. Cela sous-entend que, pour Chuquet, l'unité est divisible, contrairement à l'indivisibilité de l'unité dans la philosophie grecque.

de pirates, de navires ennemis en temps de guerre, etc. Et les contrats établis entre associés, de même que les contrats d'assurance, ne se font pas sans l'évaluation de ces risques. Le marchand a par nature le goût du risque. C'est un joueur. Et pourtant les jeux de hasard lui sont interdits. Les contrats de compagnies précisent parfois ces interdits. Ainsi, un contrat de société conclu à Anvers en 1535 entre cinq marchands qui engagent tous des fonds stipule : « […] *s'il advenait aussi que après leur départ d'Anvers vers l'Espagne et durant ainsi le temps de ladite société, aucun d'eux se trouvait en un lieu dissolu et qu'il […] fît des excès, soit de jouer ou de hanter de folles femmes et autres cas semblables, qu'il soit tenu de porter la charge et punition*... » (Jeannin, 58). Cohabitent donc chez le marchand goût et recherche d'une maîtrise du risque. D'un autre côté, la notion de justice a un poids important ; sans cesse elle est mise en avant. Le but du marchand est de s'enrichir mais il doit vendre « selon le juste prix », ne pas tromper les acheteurs, ne pas être usurier. De manière générale, les maîtres qui écrivent pour les marchands sont attentifs à l'éthique. Un problème sans doute courant est celui des ruptures de contrat au sein d'une association. En tout cas il est largement développé dans les Arithmétiques : comment faut-il répartir les gains ou les pertes de manière équitable lorsque le contrat initial est modifié en cours de route ? Rien n'est normalisé et parfois plusieurs solutions sont proposées ; reste au lecteur le choix de ce qui lui paraît le plus juste. C'est la démarche de Nicolas Chuquet dans l'appendice au *Triparty en la science des nombres* consacré au « fait de marchandise » : « *Deux marchands ont fait un contrat (*pache*) de compagnie ensemble de telle manière que l'un d'eux doit mettre la somme de 1200 l. sans la personne et l'autre doit mettre 800 l. et la personne, à savoir son service. Et ce faisant, ils doivent répartir le gain par moitié. Or il est advenu que celui qui devait mettre 1200 l. n'en a mis que 900 et celui qui devait en mettre 800 l. n'en a mis que 400 et sa personne. À savoir, ce faisant, quelle portion du gain doit prendre chacun d'eux, les contrats premiers n'étant pas corrompus mais observés et gardés* »[24]. Chuquet propose trois solutions puis conclut : que chacun prenne la solution qui lui paraît la « plus juridique » car les résultats diffèrent selon la manière de voir le problème.

L'emploi fréquent du terme « juridique », opposé à « opinion », rappelle l'adresse à la « Très illustre Académie parisienne de mathématiques »[25] que Blaise Pascal écrivit en 1654 à propos de son traité sur la répartition du hasard dans les jeux[26]. Un problème devenu fameux, dit « problème des partis » (parti au sens de partage), qui a nourri la correspondance entre Fermat et Pascal en 1654, marque traditionnellement la naissance du calcul des probabilités. Or il a déjà été posé (et d'ailleurs résolu correctement au moins une fois) dans des traités d'abaque en Italie, ceci dès le XIVe siècle[27]. Ce problème pose la question de la répartition des mises entre deux personnes jouant à un jeu de hasard, lorsque celui-ci est interrompu indépendamment de la volonté des partenaires.

---

24 « Comment la science des nombres se peult appliquer au fait de marchandises », appendice au *Triparty*, f. 264-324, au f. 282v.

25 Il s'agit sans doute de l'Académie qui réunissait des savants autour du père minime Marin Mersenne.

26 Pascal, Blaise, *Oeuvres complètes*, I, Le Guern, Michel éd., Paris, Gallimard, 1998, 172.

27 Voir par exemple Laura Toti Rigatelli, « Il problema delle parti in manoscritti del XIV e XV secolo », dans Folkerts, Menso et U. Lindgren éds., *Mathemata* (vol. 12), Wiesbaden, Steiner, 1985, 229-236 ; Schneider, Ivo, « The market place and games of chance in the fifteenth and sixteenth centuries », dans Hay, Cynthia éd., *Mathematics from Manuscript to Print,1300-1600*, Oxford, Clarendon Press, 1988, 220-235.

On joue par exemple à « pile ou face » et il est décidé que le premier joueur qui obtient trois fois « pile » gagne l'enjeu. Or le jeu est interrompu avant la fin de la partie. Si le résultat est par exemple 2 à 1 au moment de l'interruption, comment doit-on répartir la mise afin que personne ne se sente lésé ? C'est l'équivalent ludique d'une rupture de contrat. Et on sait l'imagination des écrivains mathématiciens, qui de tous temps ont appris à habiller de manière plaisante des problèmes posés à l'origine dans un contexte autre, souvent concret. Les réflexions sur le risque, sur les moyens de pallier les aléas lors d'investissement financier sont relayées par les maîtres qui proposent des solutions fondées sur le calcul : au XVI^e^ siècle, le terrain semble bien préparé pour passer de la spéculation sur le risque à une mathématisation du hasard. Plus un problème est hermétique à l'expérience, plus c'est le raisonnement qui doit y suppléer. Laissons le dernier mot à Pascal, toujours dans la même adresse à l'Académie parisienne : *« en joignant ainsi les démonstrations mathématiques à l'incertitude du hasard [...], <cet art> s'arroge à bon droit ce titre stupéfiant : Géométrie du hasard »*.

## Conclusion

Le corpus des arithmétiques commerciales écrites entre le XIV^e^ et le XVI^e^ siècle est à l'origine d'un genre d'ouvrage pédagogique qui a perduré. Un mathématicien comme Étienne Bézout (1730-1783), auteur d'un *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie*, reprend le plan commun de ces arithmétiques (opérations sur les entiers, sur les fractions, problèmes) avec de nouveaux chapitres dus aux innovations mathématiques postérieures comme les décimaux ou les logarithmes. Et plus récemment, jusqu'au début du siècle dernier, les manuels de certificat d'études primaires ont perpétué cette tradition (Spiesser 2008b, 322-330).

Si la mission principale des auteurs d'arithmétique ou de géométrie pratique est de transmettre des connaissances et non d'innover dans la discipline, le rôle de ce type de mathématiques dans l'évolution du savoir n'est toutefois pas vain et doit être pris en compte. Ces mathématiques ne sont pas « nobles », mais leur rayonnement a cependant dépassé le milieu des praticiens, en Italie d'abord en pénétrant les milieux humanistes, puis dans l'Europe des XV^e^ et surtout XVI^e^ siècles. Le monde change, les besoins techniques s'accroissent, le public visé par les mathématiques pratiques s'étend. Ramus (1515-1572), professeur au Collège royal, souhaite que le débutant apprenne à compter et mesurer plutôt que « de belles abstractions ». Et qui plus est, les règles pratiques, surtout celles du commerce, ne pervertissent pas l'arithmétique pure ; le théoricien apprendre de la pratique et le praticien de la théorie.

Enfin, la tradition commerciale apparaît comme un espace de liberté, non figé, un terrain sur lequel peuvent voir le jour, timidement certes, des idées nouvelles, qui ont pris mathématiquement corps ultérieurement. Nous venons de citer quelques exemples. En outre, le rôle de transmission de ce courant est indéniable. C'est en grande partie grâce à ces ouvrages que s'est transmise et enrichie une « culture » des problèmes, venus du fond des temps, que la numération et le calcul indo-arabe ont été diffusés, d'abord dans l'Europe méridionale. C'est aussi par le biais des « livres d'abaque » que s'est propagée en Italie l'algèbre arabe et, avec elle, les méthodes de résolution d'équation de degré deux. C'est encore ce milieu qui formera la plupart des grands algébristes de la Renaissance, tels Scipion del Ferro, Tartaglia ou Cardan, à qui nous devons la résolution algébrique de l'équation du troisième degré.

## Bibliographie

Benoit, Paul, « Arithmétiques commerciales et comptabilités dans la France médiévale », *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Benoit, Paul, Karine Chemla et John Ritter dir., Bâle-Boston-Berlin, Birkhäuser, 1992, p. 307-323.

Benoit, Paul, « Calcul, algèbre et marchandise », Serres, Michel dir., *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, Bordas, 1989, p. 196-211.

Brizzi, Gian Paolo, « Le marchand italien à l'école entre Renaissance et Lumières », Angiolini, Franco et Daniel Roche éds, *Cultures et formations négociantes dans l'Europe moderne*, Paris, éd de l'EHESS, 1995, p. 199-214.

Caster, Gilles, *Les routes de cocagne. Le siècle d'or du pastel, 1450-1561*, Toulouse, Privat, 1998.

Fourquin, Guy, *Histoire économique de l'Occident médiéval*, Paris, A. Colin, 1990.

Garin, François, *La complainte de François Garin, marchand de Lyon (1460)*, édition critique, Centre d'études et de recherches médiévales, Lyon, Presses universitaires de Lyon, 1978.

Jeannin, Pierre, *Les marchands au XVI^e^ siècle*, Paris, Le Seuil, 1957.

Spiesser, Maryvonne, « Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XV^e^ siècle », *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (44), « Histoire de l'enseignement des mathématiques », janvier-février 2003, p. 32-50.

—, « L'arithmétique pratique en France au seuil de la Renaissance : formes et acteurs d'un enseignement », *Llull* (vol. 31, n° 67), 2008a, p. 81-102.

—, « L'impact des mathématiques pratiques au XV^e^ siècle sur l'évolution de la discipline et son enseignement élémentaire », dans Viennot, Laurence dir., *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, Paris, PUF, coll. Sciences, Histoire, Société, 2008b, p. 303-331.

—, « Règle de trois, rapports et proportions : les calculs des marchands (XIV^e^-XVI^e^ siècles) », dans Rommevaux, Sabine, Philippe Vendrix, Vasco Zara éds, *Proportions. Science - musique - peinture & architecture*, Turnhout, Brepols, coll. Études renaissantes, 2011, p. 101-122.

—, La naissance d'un genre, le traité d'arithmétique commerciale (XIV^e^-XVI^e^ s.), 2017.

http://images.math.cnrs.fr/La-naissance-d-un-genre-le-traite-d-arithmetique-commerciale-XIVe-XVIe-s.html

Van Egmond, Warren, *Practical Mathematics in the Italian Renaissance : a Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*, Florence, Istituto e Museo di storia della scienza, 1980.